ＭＢ　関数解析学　線形作用素の理論　講義報告[5]

２００８年7月5日（土）　１４：００−１６：００

有界線形作用素の強収束を定義し、強収束列がノルム収束するとは必ずしも言えない例を取り上げた。次に一般の線形作用素について、和・スカラー倍・合成・拡張・制限・逆作用素を定義した。最後に閉作用素を定義し、その例として微分作用素について扱った。

定義 1.6 (有界線形作用素の強収束). E, F を ノルム空間 とする。作用素列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(E,F)$ が作用素 $T \in B(E,F)$ に**強収束**するとは、

$$\|T_n(v) - T(v)\|_F \to 0 \ (n \to \infty) \quad for\ \forall v \in E$$

が成立することである。

練習問題 1.9.

1. E, F を ノルム空間 とする。作用素列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(E,F)$ が作用素 $T \in B(E,F)$ にノルム収束、すなわち、

$$\|T_n - T\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

の時、$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は T に強収束することを示せ。

2. 強収束列は、ノルム収束とは必ずしも言えない例。

$$l^p = \left\{ a \in Map(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}) \mid \sum_{\nu\in\mathbb{N}_0} |a(\nu)|^p < \infty \right\}$$

に対して、

$$(\tau f)(m) = f(m+1) \quad for\ \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall f \in l^p$$

とおいたとき、$\tau_n = (\tau)^n \ (n \in \mathbb{N}_0)$ は $0_{B(l^p)}$ に強収束するが、ノルム収束しないことを示せ。

1.4　一般の線形作用素

定義 1.7 (作用素の和・スカラー倍・合成). V, W, Z を ノルム空間 とする。

和： T, S を V から W への線形作用素とするとき、T と S の**和**を

$$(T+S)(v) = T(v) + S(v) \quad for\ \forall v \in D(T) \cap D(S)$$

により定義する。

スカラー倍： T を V から W への線形作用素、$\lambda \in \mathbb{C}$ とするとき、T の**スカラー倍**を

$$(\lambda T)(v) = \lambda T(v) \quad for\ \forall v \in D(T)$$

により定義する。

[5] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

合成：T を V から W への線形作用素、S を W から Z への線形作用素とするとき、S と T の**合成**を

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)) \quad for\ \forall v \in D(S \circ T)$$

により定義する。ただし、$D(S \circ T) = \{v \in D(T) \mid T(v) \in D(S)\}$

練習問題 1.10. 次のことを示せ。

1. $D((U \circ S) \circ T) = D(U \circ (S \circ T))$
2. $D(\alpha(S \circ T)) = D(S \circ T),\ D((\alpha S) \circ T) = D(S \circ T)$
3. $D((S_1 + S_2) \circ T) = D(S_1 \circ T) \cap D(S_2 \circ T)$
4. $D(T \circ S_1 + T \circ S_2) \subset D(T \circ (S_1 + S_2))$

定義 1.8 (作用素の拡張). V, W を ノルム空間 とする。T, S を V から W への線形作用素とするとき、T が S の**拡張**、あるいは、S は T の**縮小**であるとは、

1. $D(S) \subset D(T)$
2. $T|_{D(S)} = S$、すなわち、$T(v) = S(v) \quad for\ \forall v \in D(S)$

を満たすことである。このとき、$S \subset T$、または、$T \subset S$ と記す。

練習問題 1.11. T を ノルム空間 V から ノルム空間 W への線形作用素とするとき、$R(T) = T(D(T)) \subset W$ を線形作用素 T の**値域**という。このとき、$R(T)$ は W の線形部分空間になることを示せ。

定義 1.9 (逆作用素). T を ノルム空間 V から ノルム空間 W への線形作用素とするとき、T が**単射**であるとは、

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$$

を満たすことである。T が単射のとき、対応

$$R(T) \ni T(u) \longrightarrow u \in D(T)$$

を T の**逆作用素**といい、$T^{-1} : W \to V$ と記す。

定義 1.10 (制限). T を ノルム空間 V から ノルム空間 W への線形作用素とする。U が $D(T)$ の線形部分空間であるとき、T を U に制限してできる線形作用素を $T|_U$ と記す。

$$D(T|_U) = U, \quad T|_U(u) = T(u)\ for\ \forall u \in U$$

定義 1.11 (閉作用素). $(V,\ \|\ \|_V), (W,\ \|\ \|_W)$ を *Banach*空間、T を V から W への線形作用素とする。V の線形部分空間 $D(T)$ にノルム

$$\|\cdot\|_T : D(T) \ni u \longrightarrow \|u\|_V + \|T(u)\|_W \in \mathbb{R}_+$$

が入る。（このノルム $\|\ \|_T$ を**グラフノルム**という。）ノルム空間 $(D(T),\ \|\ \|_T)$ が完備であるとき、T を**閉作用素**という。

例題 1.2. $C^1(I)$ を開区間 I で定義された一回連続微分可能な関数の全体とするとき、微分作用素

$$\frac{d}{dx} : C^1(I) \ni f \to f' \in C(I)$$

は $C^1(I)$ を定義域とする線形作用素になる。このとき、$C^1(I)$ にグラフノルム

$$\|f\|_{\frac{d}{dx}} = \|f\|_I + \|f'\|_I$$

が入り、$\dfrac{d}{dx}$ は閉作用素になる。

記録 by J.S